Hans Schupp

BEWEISEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER SEKUNDARSTUFE I

Didaktische Überlegungen am Beispiel der Dreiecksungleichung

1. Beweisen lernt man in der Geometrie !?

Dies ist ein traditioneller, kaum je hinterfragter Anspruch des Geometrie-Unterrichts. Und in der Tat: Wo es - etwa in Schulbüchern - um erste Beweise oder gar um ein erstes Reflektieren über Beweise geht, da dominieren elementargeometrische Beispiele, erst mit Abstand gefolgt von Teilbarkeitsbeweisen oder von Herleitungen aus den Gruppenaxiomen.

Die Gründe für diese Bevorzugung sind bekannt: Die Elementargeometrie enthält eine unerschöpfliche Fülle von reizvollen Problemen in allen Schwierigkeitsgraden; der Schüler kann über die Anschauung vergleichsweise leicht zu Vermutungen und deren Absicherung gelangen, aber auch zu nachweislich falschen Behauptungen und Argumentationen, welche die Rolle der Anschauung für die Erkenntnisgewinnung einschränken und deshalb die Suche nach anderen Erkenntniskriterien motivieren.

Nun wissen wir andrerseits, wie erschreckend gering die Fähigkeiten der Absolventen unserer allgemeinbildenden Schulen im selbständigen Führen von Beweisen sind. Und dies, obwohl im Unterricht - speziell am Gymnasium - viele Beweise geführt werden, obwohl sich Schulbuchautoren und Lehrer größte Mühe geben, das Beweisen sorgfältig vorzubereiten und zunächst auf Situationen zu beschränken, in denen tatsächlich ein Beweisbedürfnis vorliegt.

Man könnte daraus den Schluß ziehen, eigenständiges Beweisen sei in der Sekundarstufe I nicht erreichbar und darum auch nicht anzustreben. Für die Hauptschule mag dies zutreffen. Für das Gymnasium jedoch wäre ein solcher Verzicht allzu schmerzlich. Denn einmal könnte eine zentrale mathematische Aktivität nicht ausgeübt, sondern allenfalls nachvollzogen werden; und zum andern blieben wesentliche heuristische Fähigkeiten unterentwickelt, die speziell beim Beweisen geweckt und trainiert werden können, darüber hinaus aber auch für ein sachgerechtes Argumentieren in anderen Bereichen wichtig sind.

Wir sollten uns vielmehr kritisch fragen, ob die traditionellen und die aktuellen Lehrgänge der Elementargeometrie unseren Schülern wirklich die Chance zum selbständigen Beweisen geben. Beweise haben dort zumeist den Zweck, die Theorie voranzutreiben und damit den Anwendungsbereich der Geometrie auszuweiten; sie dienen mehr der Beruhigung des mathematischen Gewissens der Fachlehrer als dem sukzessiven Aufbau der Beweishaltung und der Beweisfähigkeit ihrer Schüler. Fast immer stellen sie hohe Anforderungen; mit den rasch wechselnden Inhalten verändern sich auch die bereichsspezifischen Strategien, ohne daß sie hätten verinnerlicht werden können und nun zur Verfügung stünden. Üblicherweise werden solche Beweise denn auch vom Lehrer vorgeführt oder bestenfalls im gelenkten Klassengespräch gemeinsam erarbeitet.

Wir brauchen vielmehr an geeigneter Stelle eingebaute Passagen, in denen es um das Beweisen selbst geht, in denen bestimmte Fähigkeiten des Vermutens und Sicherns ausgewiesene Lernziele sind.

Ansätze dazu sind durchaus vorhanden. Im traditionellen Mathematikunterricht kann hier auf die Winkelsätze am Dreieck, Viereck und Kreis verwiesen werden sowie auf die Kongruenzbeweise. Diese wurden allerdings von vielen Schülern nicht angenommen, weil sie zum Nachweis ‚offensichtlicher' Maßgleichheiten von Einzelstücken den ‚Umweg' über ganze Dreiecke gehen mußten. Nicht selten bauten sich hier schon die bekannten affektiven Sperren auf, die eigenständige Beweisleistungen auf Dauer verhindern. Neuerdings tritt die Übertragung von Abbildungseigenschaften auf Figureneigenschaften hinzu und - als wiederum abschreckendes Beispiel - das Beweisen von Grund-Folge-Beziehungen am Viereck.

Obwohl die Liste noch um einige Beispiele vermehrt werden könnte, ist sie nicht sehr groß. Es lohnt sich, weitere Vorschläge zu entwickeln und sich dabei auch nach bisher peripheren Inhalten umzutun.

Beispielhaft sei im folgenden der Bereich der geometrischen Ungleichungen skizziert; nicht als ausgearbeitete Sequenz, wohl aber als Hintereinanderfolge einfacher Beweise, die es erlauben, die vorab skizzierten Überlegungen zu detaillieren und zu konkretisieren.

2. Die Dreiecksungleichung

Diese Ungleichung
"Im Dreieck ist eine Seite stets kürzer als die beiden anderen Seiten zusammen."
wird in den Schulbüchern sträflich vernachlässigt (Ausnahmen: [1] und [3]). Man stößt auf sie etwa bei der Konstruktion eines Dreiecks mit vorgegebenen Seitenlängen. In Gruppen werden folgende Konstellationen bearbeitet:

$a = 5;\ b = 3;\ c = 9$ kein Dreieck
$a = 5;\ b = 3;\ c = 8$ Strecke ("ausgeartetes Dreieck")
$a = 5;\ b = 3;\ c = 7$ Dreieck
⋮ ⋮
$a = 5;\ b = 3;\ c = 3$ Dreieck
$a = 5;\ b = 3;\ c = 2$ Strecke ("ausgeartetes Dreieck")
$a = 5;\ b = 3;\ c = 1$ kein Dreieck

Die anschließende Analyse im Plenum erbringt als Konstruktionsbedingung:

$$a - b < c < a + b \quad ,$$

wobei die untere Schranke als Folge der oberen erkannt wird, sobald man diese auf alle Dreiecksseiten ausdehnt.

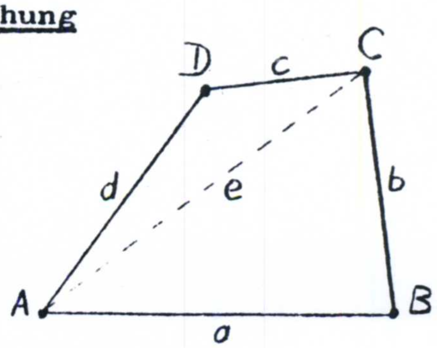
Insgesamt gelangt man zu zwei anschaulich klaren Grundsätzen, nämlich der Dreiecksungleichung (DU), und, quasi als Grenzfall, der Streckengleichung (SG)
"Eine Strecke ist so lang wie die beiden Teilstrecken zusammen, in die sie zerlegt ist."
Und zum Folgesatz:
"Im Dreieck ist eine Seite stets länger als der Längenunterschied der beiden anderen Seiten."

Beide Ungleichungen müssen bei der Vorgabe von Dreiecksseiten beachtet werden. Indem man ihre konstruktive Bedeutung betont, enthebt man sie der Selbstverständlichkeit.

3. Einfache Beweise mit der Dreiecksungleichung

Am naheliegendsten ist wohl die zweimalige Anwendung der DU beim Beweis der entsprechenden Viereckungleichung:

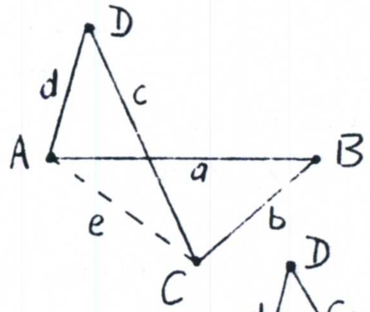
$$\left.\begin{array}{ll} a < b + e & (\text{DU in } \triangle ABC) \\ e < c + d & (\text{DU in } \triangle ACD) \end{array}\right\}\ a < b + c + d$$



Das ist ein ganz einfacher, leicht zu findender und mühelos aufzuschreibender Beweis. Die Hilfsstrecke $\overline{AC}$ (oder $\overline{BD}$) drängt sich förmlich auf, mehr als beim entsprechenden Übergang von der Dreieckswinkelsumme zur Viereckswinkelsumme, weil die Diagonale dort immerhin zwei der zu summierenden Winkel zerschneidet.

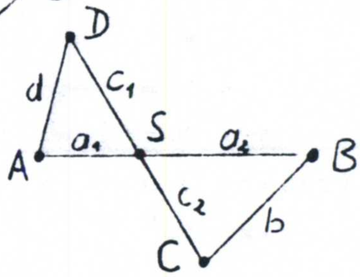
Es handelt sich hier um eine überaus wichtige Mutterstrategie: das Verketten von Einsichten (im Beispiel sogar: mit sich selbst). Sie kann sofort auch eingeübt werden, etwa durch das Benutzen der anderen Diagonale (das ist nur für uns eine banale Variante) oder bei folgender Erweiterung:

Gilt $a < b + c + d$ auch für einen die Strecke a kreuzenden Streckenzug ADBC ?



1.Lösung: Hilfslinie und Argumentation können von oben übernommen werden.

2.Lösung: Auch ohne e existieren hier zwei Teildreiecke, auf welche die DU angewandt werden kann:



$$+\left[\begin{array}{ll} a_1 < c_1 + d & (\text{DU in } \Delta ASD) \\ a_2 < c_2 + b & (\text{DU in } \Delta SCB) \end{array}\right.$$

$$\overline{}$$

$$a < c + d + b$$

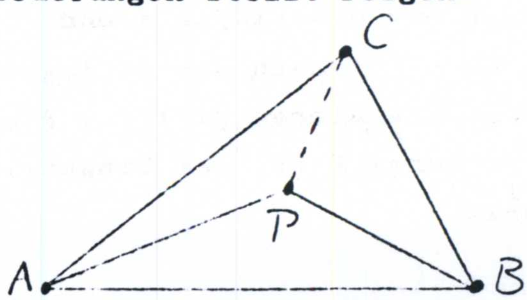
Die DU wird jetzt nicht nacheinander, sondern nebeneinander benutzt (Strategie: Zusammenlegen von Einsichten).

Man mag einwenden, diese Beweise seien zwar einfach, aber nicht sonderlich motivierend. In der Tat muß das Wecken des Beweisbedürfnisses bei problematischeren Vermutungen einsetzen. Deren Verifizierung ist aber zumeist so anspruchsvoll, daß die dortigen Beweise keinen Beitrag zum eigenständigen Beweisen leisten. Um eben dieses Vermögen geht es nun aber; deshalb sind einfache Beweise mit überschaubaren Strategien angebracht. Ihre erfolgreiche Bewältigung vermag den Schüler durchaus auch zu motivieren.

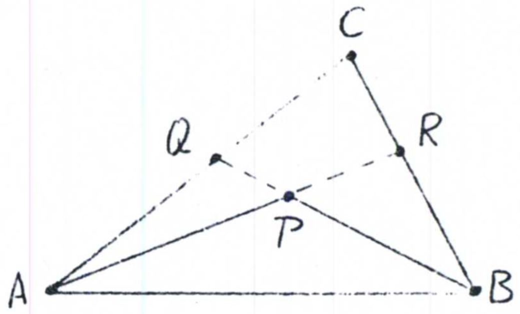
Vergleichsweise höhere (heuristische) Anforderungen stellt folgende Aufgabe:

$P \neq C$ sei ein Punkt innerhalb Δ ABC.

Zeige, daß dann gilt: $AP + PB < AC + CB$.



Die Strecke $\overline{PC}$, an die man zunächst denkt, hilft nicht weiter, denn zwar ist $AP + PB < AC + CP + PB$, aber nicht



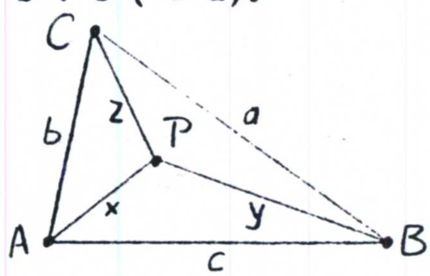
$AC + CP + PB < AC + CB$.

Impuls: Zerlege anders in Teildreiecke.

$$\begin{aligned} AP + PB &< AQ + QP + PB && (\text{DU in } \triangle APQ)\\ &= AQ + QB && (\text{SG auf } \overline{BQ})\\ &< AQ + QC + CB && (\text{DU in } \triangle QBC)\\ &= AC + CB && (\text{SG auf } \overline{AC}) \end{aligned}$$

Übung: Führe den Beweis auch mit R durch.

Nächste Aufgabe, nahegelegt durch die vorletzte Konfiguration: Vergleiche die Entfernungssumme $x + y + z$ eines Dreieckspunktes P von den Ecken mit dem Dreiecksumfang $a + b + c$ ($= u$).



Wichtig ist dabei, daß die Aufforderung zum Längenvergleich möglichst allgemein gehalten wird und lediglich von der Empfehlung begleitet ist, die bisherigen Längenvergleiche auszunutzen.

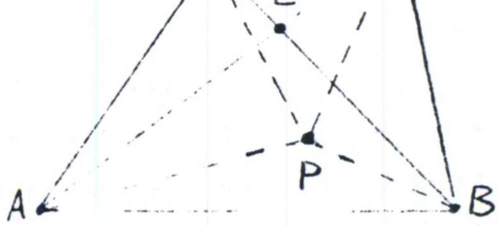
$$\begin{array}{l} x + y > c\\ y + z > a\\ z + x > b\\ \hline 2.(x+y+z) > u\\ x+y+z > \frac{u}{2} \end{array} \qquad \text{aber auch} \qquad \begin{array}{l} x + y < b + a\\ y + z < c + b\\ z + x < a + c\\ \hline 2\cdot(x+y+z) < 2\cdot u\\ x+y+z < u \end{array}$$

Also: $\frac{u}{2} < x+y+z < u$

Diese beiden Schranken sind nicht mehr unmittelbar der Anschauung zu entnehmen. Das ist wichtig, um dem möglicherweise doch aufkommenden Eindruck des Wühlens in Trivialitäten zu wehren.

Der anschließende Transfer zum Viereck sei nur angedeutet (Ergebnis: $\frac{u}{2} < x+y+z+w < \frac{3u}{2}$).

Bisher ist die Summe der Eckenentfernungen eines Innenpunktes stets mit dem Umfang verglichen worden. Wenn es nun darum geht, für vier Städte A,B,C,D ein gemeinsames Elektrizitätswerk E mit minimaler Gesamtentfernung zu bauen ([1]), kommt es auf den Vergleich der Entfernungssummen untereinander an.

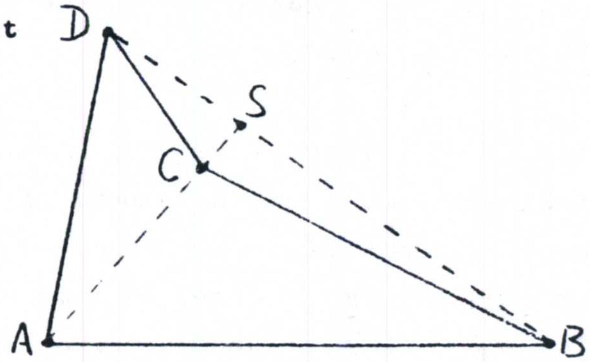


Wären nur die Städte A und C zu beachten, so könnte E nach der SG irgendwo auf $\overline{AC}$ liegen. Analoges gilt für B und D.

Vermutung: E ist der Diagonalenschnittpunkt.

Der Beweis ist bekannt. Wichtig ist die Beweisstrategie.
Sei $P \neq E$ irgendein konkurrierender Punkt. Dann gilt:
$AE + EC \leqq AP + PC$ und $DE + EB \leqq DP + PC$
wobei in mindestens einem Falle sogar $<$ gilt und daher jedenfalls
$AE + EC + DE + EB < AP + PC + DP + PC$.

Nicht unterbleiben darf hier eine Beweisanalyse. Wir haben vorausgesetzt, daß sich die Diagonalen schneiden. Beim konkaven Viereck tun sie dies nicht. Wo liegt dort der gesuchte Punkt E ?



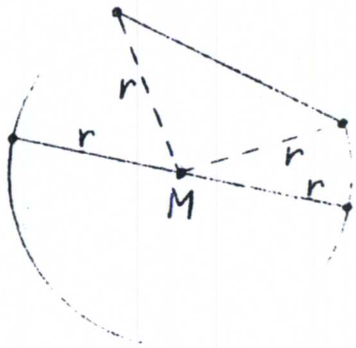
Zwar kann man hier den Schnittpunkt S der Diagonalengeraden konstruieren, doch liegt die einspringende Ecke vermutlich günstiger:
$AC + BC + DC < AS + BS + CS + DS$.
Wegen $AS = AC + CS$ (SG) genügt zu zeigen:
$BC + DC < CS + BS + CS + DS$.
Dies ergibt sich durch Addieren von $BC < CS + BS$ (DU in $\triangle CBS$) und $DC < CS + DS$ (DU in $\triangle CSD$).
Nur für konvexe Vierecke hat der Diagonalenschnittpunkt die erwähnte Minimaleigenschaft. Vorsicht beim Formulieren von Sätzen.

Beim Dreieck ist diese Vorsicht unbegründet; es gibt kein konkaves Dreieck. Es gibt dort allerdings auch keinen Diagonalenschnittpunkt, so daß sich keine analoge Vermutung anbietet. Die Aufgabe bleibt vorerst ungelöst.

(Bekanntlich ist der gesuchte Punkt der Fermat-Punkt, von dem aus alle Seiten im Sehwinkel 120° erscheinen, bzw. bei Dreiecken mit einem Winkel $\geqq 120^\circ$ dessen Scheitel ([5]). Der Beweis erfolgt zwar - wie letztlich alle Längenungleichungen - über die DU, doch ist, damit sie greifen kann, eine nicht naheliegende 60°-Drehung eines Teildreiecks erforderlich; er kann also allenfalls im Lehrer- oder Schülervortrag vorgestellt werden.)

Zurück zu einfacheren Beweisen. Wir wenden uns dem Kreis zu.
Zeige, daß die Sehnen durch den Mittelpunkt eines Kreises länger sind als jede andere Sehne.

Alle solche Längenvergleiche geschahen bisher über die DU. Um sie auch hier anwenden zu können, muß man für ein geeignetes Dreieck sorgen



Dann gilt:

Jede Mittelpunktssehne hat die Länge 2r.

Jede andere Sehne hat eine Länge $<$ 2r .

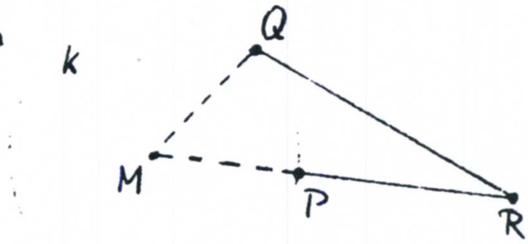
Auch Extremwertaufgaben können am Kreis wieder aufgegriffen werden, zumal sie sich mit etwas Phantasie hübsch einkleiden lassen.

Geg.: Kreis k und Punkt R außerhalb

Ges.: Kreispunkt P mit minimaler Entfernung von R.

Sofortige Vermutung: P ist der Schnittpunkt von $\overline{MR}$ mit k .

Beweis: Nach Vorgabe eines Konkurrenzpunktes $Q \in k$ $(Q \neq P)$ und Konstruktion von $\overline{QM}$ und $\overline{QR}$ gilt:



MR $<$ MQ + QR (DU in $\triangle$MRQ)

MP + PR $<$ MQ + QR (SG)

PR $<$ QR

Strategie: DU und Kreiseigenschaft verwenden

Mit der Minimierung wird auch die Maximierung zugänglich (Übung):

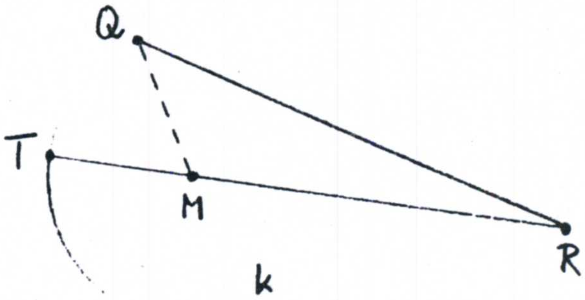
T hat unter allen Kreispunkten maximale Entfernung von R.

Denn:

TR = TM + MR (SG)

= QM + MR

$>$ QR (DU in $\triangle$QMR)



Weitere Übungen: Minimale (maximale) Entfernung eines Innenpunktes R vom Kreis; kürzeste (längste) Entfernung zwischen Kreis und Kreis (wobei ein Kreis ganz innerhalb oder ganz außerhalb des anderen liegen kann)

4. Versuch einer Auswertung

Mit einem Minimum an geometrischen Voraussetzungen (DU, SG, teilweise noch Kreiseigenschaft) konnte eine Vielzahl von einfachen, schülernahen Vermutungen gefunden, von Verifikationen und Falsifikationen durchgeführt werden. Dadurch, daß das wichtigste Beweismittel, die DU, fest bleibt und daß diese Tatsache den Schülern bekannt ist, ergeben sich folgende Vorteile:

a) Der Beweiserfolg ist überdurchschnittlich hoch. Die Schüler werden durch den Erfolg zum eigenständigen Beweisen motiviert.

b) Es können allgemeine heuristische Fähigkeiten herausgebildet und trainiert werden, z.B.

   α) Gewinnen von Vermutungen durch Messen, Anschauen, Vergleichen, Analogisieren, Transfer auf andere Figuren, Erweitern, Verfeinern, Verallgemeinern, Spezialisieren

   β) Sichern solcher Vermutungen durch Rückführen auf schon Gesichertes (bzw. Ablehnen durch Aufzeigen von Gegenbeispielen oder Widersprüchen)
   Rückführen nach bewährten Strategien (z.B Verketten oder Kombinieren von Einsichten)

   γ) Analysieren der Rückführung und eventuelles Schließen von Argumentationslücken bzw. Korrigieren der Vermutung

   δ) Entwickeln und Vergleichen mehrerer Begründungen

   ε) Zurückstellen einer Vermutung, falls ihre Sicherung mit dem momentanen Instrumentarium nicht möglich ist

c) Desgleichen bereichsspezifische Kenntnisse, z.B.

   α) Längenungleichungen in der Elementargeometrie werden letztlich aus der DU hergeleitet.

   β) Dazu ist es notwendig, die Figur, an der vermutet wird, in Dreiecke zu zerlegen oder doch geeignete Dreiecke einzuzeichnen

   und Fähigkeiten, z.B.

   γ) Einzeichnen geeigneter Dreiecke
   (einschließlich Umstrukturierung, falls der erste Versuch mißlingt)

d) Der Schüler lernt ein leicht überschaubares Beispiel für lokales axiomatisch-deduktives Vorgehen kennen.
   Streckengleichung und Dreiecksungleichung mußten wir der Anschauung entnehmen, weil wir keine noch selbstverständlicheren Aussagen über Streckenlängenvergleiche hatten, auf die wir sie hätten zurückführen können. Alle anschließenden Längenvergleiche aber, und seien sie noch so einleuchtend, sollen aus diesen beiden Grundaussagen hergeleitet werden.

Es versteht sich, daß diese Vorteile den Schülern als Lehrziele mitgeteilt und mit ihnen im Kontext der Beweisbemühungen diskutiert werden sollten. Dann leuchtet die (sachliche und didaktische) Notwendigkeit des Beweisens auch anschaulich evidenter Sachverhalte durchaus ein; eine Beeinträchtigung des Beweisbedürfnisses ist nicht zu erkennen.

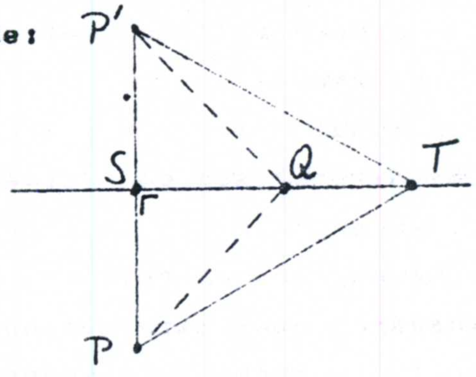
Solche Übungs- und Klärungsphasen mit möglichst einfachen (d.h. in einem relativ kleinen Suchraum lösbaren) Beweisaufgaben kommen in unseren Lehrgängen gegenwärtig noch viel zu kurz; dies dürfte eine der Ursachen sein für die bekannten Fehlleistungen beim Beweisen ([6]).

Daß Tätigkeiten der beschriebenen Art bei unserem Vorschlag zahlreiche Konstruktionen ermöglichen (etwa von Extrempunkten und -strecken) und an einem interessanten, im Sinne des Spiralprinzips ausbaufähigen Material (Arbeiten mit Ungleichungen, mit Schranken, mit Extremwerten) erfolgen, ist ein günstiger Nebeneffekt.

5. Einfache Beweise mit der Dreiecksungleichung und weiteren geometrischen Sätzen

Noch reichhaltiger wird das Übungsmaterial und das mit ihm vermittelte heuristische Arsenal, wenn man andere geometrische Einsichten mit der DU zusammenbringt. (Dies ist im Unterricht selbstverständlich weit früher möglich , als das hier aus systematischen Gründen geschehen konnte.)

Als ausgezeichnetes Beispiel darf die Kombination der DU mit der Achsenspiegelung gelten. Bekannt ist der Beweis für das Lot als kürzeste Strecke zwischen Punkt und Gerade:



$PP' < PT + TP'$ (Definition der Spiegelung und DU)

$2 \cdot PS < 2 \cdot PT$ (Definition und Eigenschaft der Spiegelung)

$PS < PT$

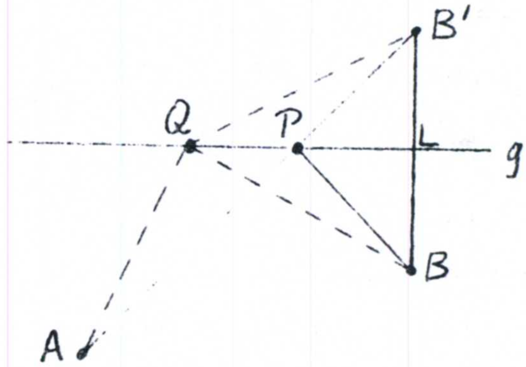
für jeden Geradenpunkt $T \neq S$

und also auch $PQ < PT$ im Falle $SQ < ST$.

Oder auch die Aufgabe, auf einer Geraden g einen Punkt P so zu finden, daß seine Entfernungssumme von zwei gegebenen Punkten A,B auf derselben Seite von g minimal ist:

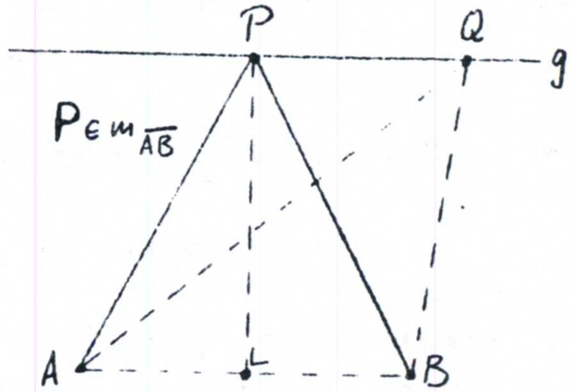
$AP + PB = AB' < AQ + QB' = AQ + QB$

für alle $Q \neq$ Schnittpunkt P von g mit AB' .



Während die Erweiterungen und physikalischen Konsequenzen dieser Aufgabe in vielen Schulbüchern zu finden sind (z.B. [3]), vermißt man oft die Spezialisierung für $\overline{AB} \parallel g$,und die Umdeutung:

Von allen Dreiecken mit gemeinsamer Grundseite und gleicher Höhe (also mit gleichem Inhalt) hat das gleichschenklige minimalen Umfang.

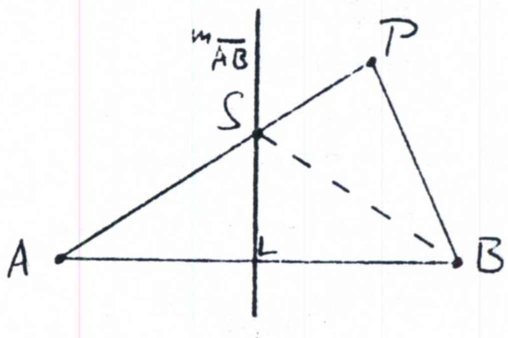


Weitere Aufgaben, die sich hier anschließen könnten: Abstand zwischen Kreis und Gerade, zwischen Punkt und Strecke, Strecke und Strecke, Punkt und Dreieck usw. Wichtig ist, daß die Schüler selbst Beispiele finden und untersuchen.

Ein zweites Beispiel: DU und Ortslinie .

Etwa bei der Mittelsenkrechte kann man mit der DU zeigen, daß alle Punkte $P \notin m_{\overline{AB}}$ von A und B ungleiche Entfernung haben:

$$PA \underset{SG}{=} PS + SA \underset{Spieg.}{=} PS + SB \underset{DU}{>} PB$$



Oder indirekt:

Angenommen: PA = PB. Dann würde gelten:

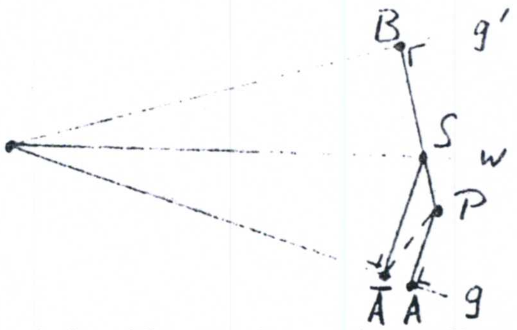
$PS + SA = PB$

$PS + SB = PB$

im Widerspruch zur DU.

Der Beweis, gleichgültig ob nun direkt oder indirekt geführt, ist hilfreicher als ein ebenfalls möglicher Symmetriebeweis, weil ein solcher bereits für den ersten Teil des Mittelsenkrechtensatzes geführt wird, so daß die Gefahr besteht, daß die beiden Schlußrichtungen nicht sauber getrennt werden.

Zudem läßt sich die Argumentation über die DU auch auf die Winkel-



halbierende fortsetzen:

$$PB \underset{SG}{=} PS + SB \underset{Spieg.}{=} PS + S\bar{A}$$

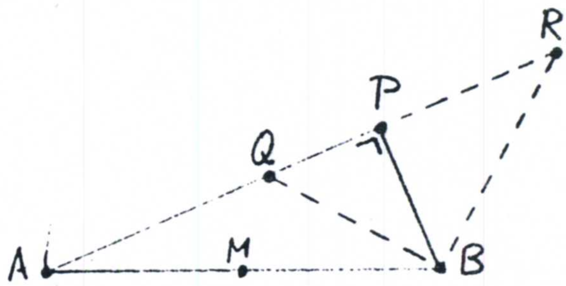
$$\underset{DU}{>} P\bar{A} \underset{Lot}{\geq} PA$$

Strategie: Wenn bewiesen ist, daß alle Punkte einer Menge (Linie) eine gewisse Entfernungseigenschaft haben, dann sollte man dies zusammen mit der DU benutzen, um nachzuweisen, daß andere Punkte diese Eigenschaft nicht aufweisen.

6. Dreiecksungleichung und Außenwinkelsatz

Wie ist das bei der Ortslinie Thales-Kreis, die sich auf eine Winkeleigenschaft bezieht ?

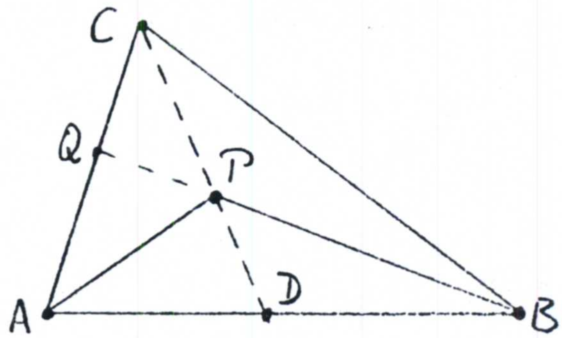
$$|\sphericalangle AQB| > |\sphericalangle APB| = 90^\circ > |\sphericalangle ARB|$$



Hier übernimmt der Außenwinkelsatz ("Im Dreieck ist ein Außenwinkel größer als ein nichtanliegender Innenwinkel.") die Rolle der DU. Ansonsten bleibt die letzterwähnte Strategie unverändert.

Die Entsprechung zwischen diesen beiden Ungleichungen zeigt sich auch an zahlreichen anderen Stellen. Ein Beispiel sei noch herausgegriffen:

$$|\sphericalangle APB| > |\sphericalangle AQB| > |\sphericalangle ACB|$$



gemäß dem Außenwinkelsatz.
Hier hilft auch die oben nutzlose Hilfsgerade durch C und P weiter:

$$\left.\begin{array}{l} |\sphericalangle APD| > |\sphericalangle ACD| \\ |\sphericalangle DPB| > |\sphericalangle DCP| \end{array}\right] +$$

$$\begin{array}{ccc} |\sphericalangle APD| + |\sphericalangle DPB| & > & |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle DCP| \\ |\sphericalangle APB| & > & |\sphericalangle ACB| \end{array}$$

wobei im letzten Schritt eine der SG analoge "Winkelgleichung" benutzt wird.

Die Entsprechung ist nicht nur heuristischer, sondern auch logischer Art. Üblicherweise leitet man bei global-axiomatischem Vorgehen aus dem Außenwinkelsatz über den Lagesatz ("Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.") die DU her ([7]). Doch auch der umgekehrte Weg (DU $\rightarrow$ Lagesatz $\rightarrow$ Außenwinkelsatz) ist möglich.

Man sollte den Außenwinkelsatz und seine Folgesätze in die mit dem beschriebenen Material konstruierbaren Sequenzen aufnehmen.

7. Schlußbemerkung

"Beweisen lernt man in der Geometrie."

Ja, aber nicht einfach dadurch, daß man sich auf die Beweise verläßt , die in dem nach anderen Gesichtspunkten organisierten elementargeometrischen Lehrgang nun eben einmal anstehen, sondern indem man mehrfach Phasen schafft, in denen eigenständiges Beweisen an einfachen Beispielen geübt werden kann und in denen sich grundlegende Beweisstrategien aufbauen lassen. Dazu einen kleinen Beitrag zu leisten, war das Ziel dieser Ausführungen.

Literatur

[1] Athen,H.-Griesel,H.(Hrsg.): Mathematik heute, Bd.8 - Hannover und Paderborn: Schroedel und Schöningh

[2] Bauersfeld,H.-Otte,M.-Steiner,H.G.: Bericht über die IMUK - IDM - Tagung zu Fragen des Geometrie-Unterrichts - Schriftenreihe des IDM 3/1974

[3] Faber,K.: Geometrie,Bd.1 - Stuttgart: Klett

[4] Holland,G.: Das Beweisen geometrischer Sätze in der Sekundarstufe I unter verschiedenen Aspekten von Geometrie (Unveröffentlichtes Manuskript)

[5] Schupp,H.: Elementargeometrie - Paderborn: Schöningh

[6] Walsch,W.: Zum Beweisen im Mathematikunterricht - Berlin: Volk und Wissen

[7] Zeitler,H.: Axiomatische Geometrie - München: Bayerischer Schulbuchverlag